

# 基于张量分析的欠定混合矩阵估计算法

马宝泽<sup>1,2,3</sup>, 李国军<sup>1,2</sup>, 向翠玲<sup>1,2</sup>, 徐阳<sup>1,2</sup>

(1. 重庆邮电大学光电工程学院, 重庆 400065;

2. 重庆邮电大学超视距可信信息传输研究所, 重庆 400065;

3. 重庆邮电大学光电信息感测与传输技术重庆市重点实验室博士后科研工作站, 重庆 400065)

**摘 要:** 针对欠定矩阵估计中存在有效特征信息提取难和算法收敛速度慢等问题, 提出基于张量分析的瞬时混合欠定矩阵估计算法, 旨在克服信号稀疏性约束。该算法通过信号分割子段的自协方差构造对称三阶张量, 并压缩为核张量降低数据规模, 利用增强线性搜索技术加速交替最小二乘算法的收敛速度, 将因子矩阵作为混合矩阵估计的测度, 但分割子段数选取是个开放问题。仿真表明, 所提算法在估计欠定混合矩阵时性能优于稀疏变换法和传统高阶统计量法。

**关键词:** 欠定矩阵估计; 对称张量; 分割策略; 自协方差矩阵

**中图分类号:** TN911.6

**文献标志码:** A

**DOI:** 10.11959/j.issn.1000-436x.2022206

## Underdetermined mixing matrix estimation algorithm based on tensor analysis

MA Baoze<sup>1,2,3</sup>, LI Guojun<sup>1,2</sup>, XIANG Cuiling<sup>1,2</sup>, XU Yang<sup>1,2</sup>

1. School of Electro-optics Engineering, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China

2. Lab of Beyond LOS Reliable Information Transmission, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China

3. Postdoctoral Research Workstation of Chongqing Key Laboratory of Optoelectronic Information Sensing and Transmission Technology, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China

**Abstract:** Aiming at the problems of difficult to extract effective feature information and the slow convergence speed of the underdetermined matrix estimation, an underdetermined matrix estimation algorithm of instantaneous mixtures based on tensor analysis was proposed to overcome the constraint of signal sparsity. In the proposed algorithm, the symmetric third-order tensor was constructed via the autocovariance matrix of segmentation sub-block, which was compressed into a kernel tensor to reduce the size of the data. An enhanced line search technology was applied to speed up the convergence of alternating least squares method, and the factor matrix was used as the measure of the mixing matrix estimation, but the selection of the number of segmentation sub-blocks was an open problem. Experimental results demonstrate that the proposed algorithm outperforms the sparse transformation method and the traditional high-order statistical method in handling the underdetermined mixing matrix estimation.

**Keywords:** underdetermined matrix estimation, symmetric tensor, segmentation strategy, autocovariance matrix

## 0 引言

盲源分离 (BSS, blind source separation) 是指

在仅以观测混合信号为先验信息的情况下, 实现信道混合矩阵辨识和期望信源恢复的信号处理技术<sup>[1-4]</sup>。

其中, 信道混合矩阵估计是盲源分离问题研究的关

收稿日期: 2022-07-08; 修回日期: 2022-10-09

基金项目: 国家重点研发计划基金资助项目 (No.2019YFC1511300); 国家自然科学基金资助项目 (No.62201113); 重庆市重点研发计划基金资助项目 (No.cstc2017zdcy-zdyfX0011)

**Foundation Items:** The National Key Research and Development Program of China (No.2019YFC1511300), The National Natural Science Foundation of China (No.62201113), Chongqing Key Research and Development Program (No.cstc2017zdcy-zdyfX0011)

键,直接影响着估计信源的分离精度<sup>[5-6]</sup>。传统的独立分量分析(ICA, independent component analysis)方法、独立矢量分析(IVA, independent vector analysis)方法能够处理超定和正定情况下的混合信道矩阵估计问题<sup>[2]</sup>,但不能用于欠定混合信道矩阵盲辨识。由于欠定线性混合系统中方程的个数小于未知数的个数,即观测信号数少于源信号数,这将导致估计混合矩阵不存在伪逆,给解决欠定混合矩阵估计问题带来挑战<sup>[7-9]</sup>。因此,欠定混合信道矩阵的盲辨识问题具有重要的研究价值,对实现欠定情况的源信号恢复至关重要。

目前,解决欠定混合矩阵估计的方法主要集中在观测信号的特定属性,如稀疏变换<sup>[6,10]</sup>、四阶累积量<sup>[11]</sup>、二阶统计量<sup>[12]</sup>、特征函数<sup>[13]</sup>、张量分析<sup>[14-16]</sup>等。其中,利用信号在变换域的稀疏性解决欠定盲辨识问题是常用的方案之一,代表算法包括TIFROM(time-frequency ratio of mixtures)<sup>[10]</sup>以及基于稀疏分量分析的欠定盲源分离(UBSS-SCA, underdetermined blind source separation-sparse component analysis)算法<sup>[6]</sup>。稀疏变换类方法利用信号在稀疏域的散点数据线性聚类特性依次估计混合信道矩阵的方向向量,然而观测信号个数以及数据的稀疏程度均会限制该类方法的应用范围。当源信号在变换域非稀疏但是满足统计独立性且具有时间结构特征时,可以根据观测信号的高阶统计特性完成欠定混合矩阵估计任务。文献[11]利用信号在不同时延下计算的四阶累积量提出了FOBIUM(fourth-order cumulant-based blind identification of underdetermined mixtures)算法,但是估计四阶累积量是比较复杂的工作且需要较大的数据量才能获取有效的累积量统计信息。为了提升欠定混合矩阵盲辨识的性能并降低算法计算复杂度,文献[12]通过观测信号时延数据得到的空间协方差矩阵提出了SOBIUM(second-order covariance based blind identification of underdetermined mixtures)方法。FOBIUM和SOBIUM适用于时域信息丰富的信号,可利用信号的时延统计信息实现欠定盲辨识。随后,文献[13]针对复值数据提出了基于观测信号特征函数构造张量模型的欠定盲辨识方法,为构造高阶张量数据提供了研究思路。此外,文献[14]利用信号分割策略提出了基于张量分析的大规模系统盲辨识方法,文献[15]将张量分析理论应用到欠定模态识别领域,文献[16]则提出在

线稀疏张量重构方法可以作为多维信号处理的潜在技术。综上所述,欠定混合矩阵估计问题大致可分为基于稀疏变换<sup>[6,10]</sup>和高阶统计量<sup>[11,12,14-16]</sup>2个解决思路。

本文从理论上阐述了信道盲辨识和张量分析的关系,将欠定混合矩阵估计问题转化为张量分解问题,并分析了由自协方差矩阵构成的三阶张量的对称性。为了提取观测信号的有效统计信息构造张量模型,同时降低计算复杂度并提高收敛速度,本文提出了一种新的欠定混合矩阵估计算法。首先,根据信号分割<sup>[1,14]</sup>策略计算观测信号每个子段的自协方差矩阵构造对称的三阶张量;其次,通过截断多线性奇异值分解(MLSVD, multi-linear singular value decomposition)方法将原张量降维压缩成一个低维的核张量;再次,引入增强的线性搜索(ELS, enhanced line search)技术<sup>[17]</sup>来加速交替最小二乘(ALS, alternating least square)算法<sup>[18]</sup>的收敛;最后,利用对称核张量分解得到的因子矩阵作为估计混合矩阵测度,从而实现信道盲辨识。实验表明,本文算法在处理欠定混合矩阵估计问题时的估计误差均小于稀疏变换方法和传统的高阶统计量方法。

## 1 问题描述

信道矩阵的盲辨识研究是源信号恢复的关键,特别是在欠定混合的条件下。假设 $n$ 个源信号表示为 $\mathbf{s}(k)=[s_1(k), \dots, s_n(k)]^T \in \mathbb{R}^{n \times N}$ ,  $m$ 个观测信号表示为 $\mathbf{x}(k)=[x_1(k), \dots, x_m(k)]^T \in \mathbb{R}^{m \times N}$ ,其中, $k$ 表示离散时间, $N$ 表示信号长度, $(\cdot)^T$ 表示转置运算。由于瞬时混合过程中传输信道仅考虑了源信号在传输过程中幅度衰减的影响,因此混合系统可以用随机生成的矩阵 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 表示。则第 $i$ 个传感器接收到的观测信号可以表示为

$$x_i(k) = \sum_{j=1}^n a_{ij} s_j(k) + n_i(k) \quad (1)$$

其中, $a_{ij}$ 表示第 $j$ 个源信号到达第 $i$ 个传感器的衰减系数,即混合矩阵 $\mathbf{A}$ 的第 $(i, j)$ 个元素, $s_j(k)$ 表示第 $j$ 个源信号, $n_i(k)$ 表示第 $i$ 个观测信号对应的加性噪声。

线性瞬时混合过程的矩阵形式可以表示为

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}\mathbf{s}(k) + \mathbf{n}(k) \quad (2)$$

其中, $\mathbf{n}(k)=[n_1(k), \dots, n_m(k)]^T \in \mathbb{R}^{m \times N}$ 为 $m$ 维加性噪

声。在  $\mathbf{s}(k)$  和  $\mathbf{A}$  先验信息均未知的情况下，通过对  $\mathbf{x}(k)$  进行处理估计出解混矩阵  $\mathbf{W}$ ，从而得到估计源信号  $\hat{\mathbf{s}}(k) = [\hat{s}_1(k), \dots, \hat{s}_n(k)]^T$ 。由此可知，混合信道矩阵的盲估计是解决盲源分离问题的关键，尤其是在  $m < n$  的欠定情况下估计混合矩阵。本文假设信源数  $n$  是已知的，即不涉及信源数估计环节。当不考虑噪声时，观测信号分离过程的矩阵形式可以表示为

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{W}\mathbf{x}(k) = \mathbf{W}\mathbf{A}\mathbf{s}(k) = \mathbf{A}\mathbf{D}\mathbf{s}(k) \quad (3)$$

其中， $\mathbf{y}(k) = [y_1(k), \dots, y_n(k)]^T \in \mathbb{R}^{n \times N}$  表示分离信号，即  $\mathbf{y}(k) = \hat{\mathbf{s}}(k)$ 。令  $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{n \times n} = \mathbf{W}\mathbf{A}$  表示全局矩阵，当  $\mathbf{G} = \mathbf{I}$  ( $\mathbf{I}$  是  $n \times n$  的单位矩阵) 时，分离矩阵  $\mathbf{W}$  可以看作混合矩阵  $\mathbf{A}$  的逆。此外， $\mathbf{A}$  表示任意非奇异的对角矩阵，反映分离信号的幅度模糊性； $\mathbf{D}$  表示任意的排序矩阵，反映分离信号的排序模糊性。幅度模糊性并不会影响信源波形的恢复，并且分离信号的排列顺序也不会使估计信源失真。因此，在处理瞬时混合模型时不必考虑模糊性的影响。

## 2 张量分解和混合矩阵估计的关系

瞬时混合信道盲辨识中的矩阵估计问题可以转化为对称张量的分解问题，为了阐释混合矩阵估计和张量分解的关系，需要先介绍有关张量分解的基本概念。应用广泛的张量分解技术主要包括 CP (CANDECOMP/PARAFAC) 分解和 Tucker 分解，两者都是张量奇异值分解 (SVD, singular value decomposition) 的扩展版本。CP 分解的计算复杂度为仅与张量阶数有关的线性形式，而 Tucker 分解则存在“维数灾难”的问题，即计算复杂度随着张量阶数以指数的形式增加<sup>[19]</sup>。因此，本文选择 CP 分解估计欠定混合矩阵，建立欠定信道盲辨识与张量分解的关系。

CP 分解能够将一个高阶张量分解为一系列秩一分量之和的形式，不失一般性，给定一个三阶张量  $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{I \times J \times K}$ ，经 CP 分解后可以表示为

$$\mathcal{X} \approx [\mathbf{V}, \mathbf{B}, \mathbf{C}] \equiv \sum_{r=1}^R \mathbf{v}_r \circ \mathbf{b}_r \circ \mathbf{c}_r \quad (4)$$

其中， $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \dots \ \mathbf{v}_R]$ 、 $\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \dots \ \mathbf{b}_R]$  和  $\mathbf{C} = [\mathbf{c}_1 \ \mathbf{c}_2 \ \dots \ \mathbf{c}_R]$  分别为张量分解后得到的因子矩阵， $\mathbf{v}_r \in \mathbb{R}^I$ ， $\mathbf{b}_r \in \mathbb{R}^J$ ， $\mathbf{c}_r \in \mathbb{R}^K$ ，且正整数  $R$  表示三阶张量的秩， $\circ$  表示向量外积。本文令张量的秩与信源数相等，即  $R = n$ 。此外，式(4)可以表示为元

素的形式，则张量的第  $(i, j, k)$  个元素可以表示为

$$x_{ijk} \approx \sum_{r=1}^R v_{ir} b_{jr} c_{kr} \quad (5)$$

其中， $i = 1, \dots, I$ ， $j = 1, \dots, J$ ， $k = 1, \dots, K$ 。假设因子矩阵  $\mathbf{V}$ 、 $\mathbf{B}$  和  $\mathbf{C}$  的列均被归一化为单位向量，权值选取范围设定在向量  $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^R$  中，则  $\mathcal{X}$  可以表示为

$$\mathcal{X} \approx [\boldsymbol{\lambda}; \mathbf{V}, \mathbf{B}, \mathbf{C}] \equiv \sum_{r=1}^R \lambda_r \mathbf{v}_r \circ \mathbf{b}_r \circ \mathbf{c}_r \quad (6)$$

三阶张量 CP 分解唯一性的充要条件是张量的 3 个维度  $I$ 、 $J$ 、 $K$  以及秩  $R$  满足条件  $R \leq K$  且  $R(R-1) \leq \frac{I(I-1)J(J-1)}{2}$ 。此外，张量分解的唯一

性意味着除了因子矩阵  $\mathbf{V}$ 、 $\mathbf{B}$  和  $\mathbf{C}$  的幅度和排列具有不确定性之外，秩一向量之和可以作为张量  $\mathcal{X}$  的唯一可能组合。排列不确定性是指秩一向量可以任意重新排序，即存在任意维度为  $R \times R$  的排列矩阵  $\boldsymbol{\Pi}$ ，使  $\mathcal{X} = [\mathbf{V}, \mathbf{B}, \mathbf{C}] = [\mathbf{V}\boldsymbol{\Pi}, \mathbf{B}\boldsymbol{\Pi}, \mathbf{C}\boldsymbol{\Pi}]$  成立。幅度不确定性是指可以对任意向量进行尺度缩放，即假设存在参数满足等式  $\alpha_r \beta_r \gamma_r = 1$ ，则式(4)可以改写

为  $\mathcal{X} = \sum_{r=1}^R (\alpha_r \mathbf{v}_r) \circ (\beta_r \mathbf{b}_r) \circ (\gamma_r \mathbf{c}_r)$ 。在分析 CP 分解唯一性问题时，如果因子矩阵仅存在幅度和排列顺序的不确定性，则称该张量的 CP 分解是本质唯一存在的<sup>[20-21]</sup>。由三阶张量 CP 分解的唯一性分析可知，因子矩阵存在幅度和排序 2 个方面的不确定性，与信道盲辨识中的估计混合矩阵存在幅度和排序模糊性是一致的，这就为运用张量的 CP 分解估计盲辨识中的混合矩阵提供了理论依据。

## 3 构造对称三阶张量

假设源信号和观测信号的长度均为  $N$ ，即采样点  $k$  的取值范围为  $[1, N]$ ，则将观测序列  $\mathbf{x}(k)$  分割为  $P$  个非重叠的子块矩阵。每个子段序列包含  $N_b = \left\lfloor \frac{N}{P} \right\rfloor$  个数据点，可以用  $p = 1, 2, \dots, P$  作为子块序列的索引。其中， $\lfloor \cdot \rfloor$  表示向零方向取整运算。观测信号分割后的第  $p$  个子块序列  $\mathbf{x}(p, k)$  包含的采样点  $k$  的取值范围为  $[N_b(p-1)+1, N_b p]$ ，则在不考虑噪声影响的情况下，根据式(2)可以得到观测信号和源信号的第  $p$  个子块序列之间的关系为

$$\mathbf{x}(p, k) = \mathbf{A}\mathbf{s}(p, k) \quad (7)$$

其中， $\mathbf{x}(p, k) = [x_1(p, k), \dots, x_m(p, k)]^T \in \mathbb{R}^{m \times N_b}$  和

$\mathbf{s}(p, k) = [s_1(p, k), \dots, s_n(p, k)]^T \in \mathbb{R}^{n \times N_b}$  分别表示观测信号和源信号的第  $p$  个子块序列。计算观测信号每个子块序列的自协方差可以得到  $P$  个维度为  $m \times m$  的解析矩阵, 将每个自协方差矩阵作为三阶张量的切片叠加起来就能构成一个  $m \times m \times P$  的张量形式。

因此, 第  $p$  个子块对应的自协方差矩阵可以用  $\mathbf{C}_x(p) = E\left\{[\mathbf{x}(p, k) - \bar{\mathbf{u}}_x(p, k)][\mathbf{x}(p, k) - \bar{\mathbf{u}}_x(p, k)]^H\right\}$  表示。其中,  $\mathbf{C}_x(p) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $k$  表示分割子块的索引,  $\bar{\mathbf{u}}_x(p, k) = \mathbf{x}(p, k) - E[\mathbf{x}(p, k)]$  表示子块序列均值。则自协方差  $\mathbf{C}_x(p)$  也可以表示为矩阵的形式, 即

$$\mathbf{C}_x(p) = \mathbf{A} \mathbf{C}_s(p) \mathbf{A}^H \quad (8)$$

其中,  $\mathbf{C}_s(p) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  表示源信号第  $p$  个子块序列  $\mathbf{s}(p, k)$  的自协方差矩阵,  $(\cdot)^H$  表示 Hermitian 转置。将  $P$  个自协方差矩阵堆叠成张量的形式, 可以分别得到与观测信号和源信号对应的三阶对称张量  $\mathbf{C}_x \in \mathbb{R}^{m \times m \times P}$  和  $\mathbf{C}_s \in \mathbb{R}^{n \times n \times P}$ 。

利用分割策略<sup>[1,14]</sup>构造三阶对称张量实现欠定混合矩阵估计的流程如图 1 所示, 首先, 将观测信号分割为不重叠的若干个子块; 然后, 计算每个子块的自协方差矩阵并堆叠成张量的形式; 最后, 根据对称张量的分解唯一性理论实现混合矩阵的估计。通过图 1 可以看出, 张量分解后由  $\mathbf{v}_i$  和  $\mathbf{b}_i$  构成的因子矩阵中包含信道矩阵信息, 因此可以将因子矩阵  $\mathbf{V}$  或者  $\mathbf{B}$  作为估计混合矩阵, 图 1 中以  $\mathbf{V}$  为例, 即  $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{V} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 。此外,  $\mathbf{c}_i$  构成的因子矩阵包含信号的分块信息。分割策略计算自协方差矩阵构造张量的方式可以实现将混合矩阵估计问题转化为张量分解。同时, 张量分解的唯一性能够保障混合矩阵估计的可行性和有效性。

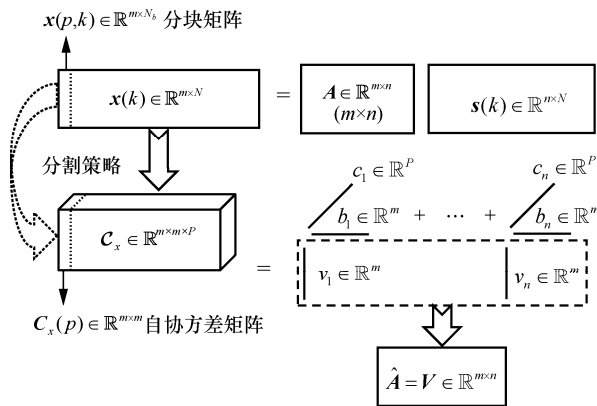


图 1 分割策略应用于欠定混合矩阵估计的流程

由上述分析可知,  $\mathbf{C}_x$  中存在 2 个相等的模态, 故称  $\mathbf{C}_x$  为对称张量。如果存在  $m = P$ , 则认为三阶张量  $\mathbf{C}_x$  具有超对称性。不失一般性, 对称张量可以通过 CP 分解获得 2 个维度相同的因子矩阵, 即

$$\mathbf{C}_x \approx [\mathbf{A}, \mathbf{A}, \mathbf{C}] = \sum_{r=1}^R a_r \circ a_r \circ c_r \quad (9)$$

其中, 2 个矩阵  $\mathbf{A}$  可以视为不同的因子矩阵, 分别记为  $\mathbf{A}_L$  和  $\mathbf{A}_R$ 。 $\mathbf{A}_L$  和  $\mathbf{A}_R$  独立更新且不存在强制相等的显式约束, 自协方差矩阵的固有对称性将使这 2 个因子矩阵最终收敛, 并且按照某个对角矩阵缩放。研究表明, 只要 CP 分解具有唯一性, 就能够得到对称张量分解的解决方案。

#### 4 核张量分解

通过 MLSVD 对构造的三阶对称张量  $\mathbf{C}_x$  降维, 将原始张量压缩为维度较小的核张量。由三阶张量 CP 分解唯一性的充要条件可知  $n \leq P$ , 不妨设定核张量的最大维度不超过  $n+1$ , 即观测信号分割构造的自协方差张量第三个维度需要由  $P$  降到  $n+1$ , 得到  $m \times m \times (n+1)$  的核张量。其中,  $P$  的选取是个开放性问题, 需要根据具体的应用场景、信号属性以及张量分解的唯一性约束等确定。首先, 三阶张量  $\mathbf{C}_x$  按照 Mode- $k$  形式展开的矩阵分别记为  $\mathbf{C}_1 \in \mathbb{R}^{m \times m \times P}$ 、 $\mathbf{C}_2 \in \mathbb{R}^{m \times m \times P}$  和  $\mathbf{C}_3 \in \mathbb{R}^{P \times m \times m}$ 。然后, 分别计算矩阵  $\mathbf{C}_1$ 、 $\mathbf{C}_2$  和  $\mathbf{C}_3$  的 SVD, 即

$$\begin{cases} \mathbf{C}_1 = \mathbf{U}_1 \boldsymbol{\Sigma}_1 \mathbf{V}_1^T \\ \mathbf{C}_2 = \mathbf{U}_2 \boldsymbol{\Sigma}_2 \mathbf{V}_2^T \\ \mathbf{C}_3 = \mathbf{U}_3 \boldsymbol{\Sigma}_3 \mathbf{V}_3^T \end{cases} \quad (10)$$

其中,  $\boldsymbol{\Sigma}_i$  表示由特征值构成的对角矩阵,  $i \in \{1, 2, 3\}$ 。由式(10)可以得到 3 个左奇异矩阵  $\mathbf{U}_1$ 、 $\mathbf{U}_2$  和  $\mathbf{U}_3$ 。根据核张量维度要求, 分别截取左奇异矩阵  $\mathbf{U}_1$  的前  $m$  列、 $\mathbf{U}_2$  的前  $m$  列、 $\mathbf{U}_3$  的前  $n+1$  列, 并分别记为  $\bar{\mathbf{U}}_1$ 、 $\bar{\mathbf{U}}_2$  和  $\bar{\mathbf{U}}_3$ 。最后, 利用截取左奇异矩阵计算核张量  $\mathbf{g} = \mathbf{C}_x \times_1 \bar{\mathbf{U}}_1^T \times_2 \bar{\mathbf{U}}_2^T \times_3 \bar{\mathbf{U}}_3^T \in \mathbb{R}^{m \times m \times (n+1)}$ ,  $\times_k$  表示  $k$ -模态积。将观测信号分割构造的三阶张量  $\mathbf{C}_x \in \mathbb{R}^{m \times m \times P}$  通过截断 MLSVD 降维到核张量  $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^{m \times m \times (n+1)}$ , 降低了张量分解算法处理的数据量。

传统的 CP 分解问题通常采用 ALS 算法<sup>[18]</sup>解决, 每次迭代时每个步骤都包含将未知参数子集固定到当前估计中, 然后对剩余的未知参数集进行修正, 最后对互补参数集进行优化。因此, 张量分解的代价函数可以表示为

$$f(\mathbf{V}, \mathbf{B}, \mathbf{C}) = \left\| \mathcal{X} - \sum_{r=1}^R \hat{\mathbf{v}}_r \circ \hat{\mathbf{b}}_r \circ \hat{\mathbf{c}}_r \right\|_{\text{F}}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{ijk} \left| x_{ijk} - \sum_{r=1}^R \hat{v}_{ir} \hat{b}_{jr} \hat{c}_{kr} \right|^2 \quad (11)$$

其中,  $\|\cdot\|_{\text{F}}^2$  表示 Frobenius 范数,  $\hat{\mathbf{v}}_r \in \mathbb{R}^I$ 、 $\hat{\mathbf{b}}_r \in \mathbb{R}^J$ 、 $\hat{\mathbf{c}}_r \in \mathbb{R}^K$  分别表示因子矩阵的第  $r$  个估计向量。将式(11)中的代价函数最小化就可以得出张量分解的 3 个因子矩阵, 以此作为估计混合矩阵的测度。

鉴于 ALS 算法收敛速度较慢是由  $\hat{\mathbf{v}}_r$ 、 $\hat{\mathbf{b}}_r$ 、 $\hat{\mathbf{c}}_r$  沿固定方向逐渐增加导致的, 因此可以采用线性搜索方式加快算法的收敛速度。本文引入了 ELS 算法<sup>[17]</sup>来加速 ALS 算法的收敛, 该组合算法常用于张量分解中。ELS 的计算过程包括对当前估计的未知因子矩阵进行线性插值, 则插值矩阵可以表示为

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{V}}^{(\text{new})} = \hat{\mathbf{V}}^{(t-2)} + \mu(\hat{\mathbf{V}}^{(t-1)} - \hat{\mathbf{V}}^{(t-2)}) \\ \hat{\mathbf{B}}^{(\text{new})} = \hat{\mathbf{B}}^{(t-2)} + \mu(\hat{\mathbf{B}}^{(t-1)} - \hat{\mathbf{B}}^{(t-2)}) \\ \hat{\mathbf{C}}^{(\text{new})} = \hat{\mathbf{C}}^{(t-2)} + \mu(\hat{\mathbf{C}}^{(t-1)} - \hat{\mathbf{C}}^{(t-2)}) \end{cases} \quad (12)$$

其中,  $\hat{\mathbf{V}}^{(t-1)}$ 、 $\hat{\mathbf{B}}^{(t-1)}$ 、 $\hat{\mathbf{C}}^{(t-1)}$  分别表示 ALS 第  $t-1$  次迭代得到的估计因子矩阵,  $\mu$  表示搜索方向上的步长, 即松弛因子。则因子矩阵的第  $t$  次迭代的搜索方向可以用  $\mathbf{G}_V^{(t)} = \hat{\mathbf{V}}^{(t-1)} - \hat{\mathbf{V}}^{(t-2)}$ 、 $\mathbf{G}_B^{(t)} = \hat{\mathbf{B}}^{(t-1)} - \hat{\mathbf{B}}^{(t-2)}$ 、 $\mathbf{G}_C^{(t)} = \hat{\mathbf{C}}^{(t-1)} - \hat{\mathbf{C}}^{(t-2)}$  表示。在 ALS 迭代前进行线性搜索运算, 将插值矩阵  $\hat{\mathbf{V}}^{(\text{new})}$ 、 $\hat{\mathbf{B}}^{(\text{new})}$ 、 $\hat{\mathbf{C}}^{(\text{new})}$  作为 ALS 第  $t$  次迭代的初始化。线性搜索的挑战是找到一个最优步长在搜索方向上加快算法的收敛速度, 步长的选择包括固定步长、对数步长和多项式步长等。

令矩阵  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{KJ \times I}$  表示张量  $\mathcal{X}$  的矩阵展开形式, 记为  $\mathbf{X}^{KJ \times I}$ , 在给定因子矩阵  $\mathbf{V}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{C}$  在第  $t-1$  和  $t-2$  次迭代的估计值情况下, 第  $t$  次迭代中的最优松弛因子  $\mu$  可以通过最小化代价函数得到, 则式(11)可以改写为

$$f^{(t)} = \left\| \mathbf{X}^{KJ \times I} - \hat{\mathbf{C}}^{(\text{new})} \odot \hat{\mathbf{B}}^{(\text{new})} \hat{\mathbf{V}}^{(\text{new})\text{T}} \right\|_{\text{F}}^2 = \left\| (\hat{\mathbf{C}}^{(t-2)} + \mu \mathbf{G}_C^{(t)}) \odot (\hat{\mathbf{B}}^{(t-2)} + \mu \mathbf{G}_B^{(t)}) \cdot (\hat{\mathbf{V}}^{(t-2)} + \mu \mathbf{G}_V^{(t)})^{\text{T}} - \mathbf{X}^{KJ \times I} \right\|_{\text{F}}^2 \quad (13)$$

其中,  $\odot$  表示 Khatri-Rao 乘积。则式(13)可简化为

$$f^{(t)} = \left\| \mu^3 \mathbf{T}_3 + \mu^2 \mathbf{T}_2 + \mu \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_0 \right\|_{\text{F}}^2 \quad (14)$$

为了方便符号标记, 将式(13)中的上标  $t$  和  $t-2$  省略。在式(14)中,  $\mathbf{T}_3$ 、 $\mathbf{T}_2$ 、 $\mathbf{T}_1$ 、 $\mathbf{T}_0$  分别定义为

$$\begin{cases} \mathbf{T}_3 = (\mathbf{G}_C \odot \mathbf{G}_B) \mathbf{G}_V^{\text{T}} \\ \mathbf{T}_2 = (\mathbf{C} \odot \mathbf{G}_B + \mathbf{G}_C \odot \mathbf{B}) \mathbf{G}_V^{\text{T}} + (\mathbf{G}_C \odot \mathbf{G}_B) \mathbf{V}^{\text{T}} \\ \mathbf{T}_1 = (\mathbf{C} \odot \mathbf{B}) \mathbf{G}_V^{\text{T}} + (\mathbf{C} \odot \mathbf{G}_B + \mathbf{G}_C \odot \mathbf{B}) \mathbf{V}^{\text{T}} \\ \mathbf{T}_0 = (\mathbf{C} \odot \mathbf{B}) \mathbf{V}^{\text{T}} - \mathbf{X} \end{cases} \quad (15)$$

对于实数域张量分解, 式(14)中的代价函数可以改写为  $f_r^{(t)} = \mathbf{u}^{\text{T}} \mathbf{T}^{\text{T}} \mathbf{T} \mathbf{u}$  的形式。其中,  $\mathbf{T} = [\text{Vec}(\mathbf{T}_3) | \text{Vec}(\mathbf{T}_2) | \text{Vec}(\mathbf{T}_1) | \text{Vec}(\mathbf{T}_0)] \in \mathbb{R}^{JK \times 4}$ ,  $\mathbf{u} = [\mu^3, \mu^2, \mu, 1]^{\text{T}}$ ,  $\text{Vec}(\cdot)$  表示矩阵向量化运算。由于实数域代价函数是关于实数变量  $\mu$  的 6 次多项式, 可以通过最小化多项式计算出最优的松弛因子。将更新后的松弛因子  $\mu$  代入式(12)得到迭代后的因子矩阵, 并通过式(16)完成 ALS 对因子矩阵的更新。

$$\begin{cases} \mathbf{V} = [(\mathbf{C} \odot \mathbf{B})^+ \mathbf{X}^{KJ \times I}]^{\text{T}} \\ \mathbf{B} = [(\mathbf{V} \odot \mathbf{C})^+ \mathbf{X}^{IK \times J}]^{\text{T}} \\ \mathbf{C} = [(\mathbf{B} \odot \mathbf{A})^+ \mathbf{X}^{JK \times K}]^{\text{T}} \end{cases} \quad (16)$$

其中,  $(\cdot)^+$  表示 Moore-Penrose 伪逆。利用式(10)中的左奇异矩阵将更新后的因子矩阵转换到原来的域中, 即  $\tilde{\mathbf{V}} = \mathbf{U}_1 \mathbf{V}$ 、 $\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{U}_2 \mathbf{B}$ 、 $\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{U}_3 \mathbf{C}$ , 再将因子矩阵  $\tilde{\mathbf{V}}$ 、 $\tilde{\mathbf{B}}$ 、 $\tilde{\mathbf{C}}$  和原始对称张量  $\mathcal{C}_x$  作为 ELS+ALS 的输入, 直到达到算法的迭代终止条件, 本文算法流程如算法 1 所示。

**算法 1** 本文算法流程

**步骤 1** 计算观测信号分割后每个子段的自协方差矩阵, 利用式(8)构造三阶对称张量  $\mathcal{C}_x \in \mathbb{R}^{m \times m \times P}$ 。

**步骤 2** 通过截断 MLSVD 方法对张量  $\mathcal{C}_x$  进行降维, 利用式(10)得到左奇异矩阵计算三阶对称的核张量  $\mathcal{G} \in \mathbb{K}^{m \times m \times (n+1)}$ 。

**步骤 3** 将核张量  $\mathcal{G}$  作为 ELS+ALS 优化张量分解方法的输入, 对因子矩阵进行初始化并更新。

① 采取强制随机初始化的方式实现因子矩阵的初始化, 即初始化  $\hat{\mathbf{V}}^{(t-2)}$ 、 $\mathbf{G}_V^{(t)}$ 、 $\hat{\mathbf{B}}^{(t-2)}$ 、 $\mathbf{G}_B^{(t)}$ 、 $\hat{\mathbf{C}}^{(t-2)}$ 、 $\mathbf{G}_C^{(t)}$ 。

② 根据式(13)~式(15)将代价函数转化为多项式并求偏导计算最优的松弛因子  $\mu$ , 使式(14)取得极小值。

③ 利用式(12)中的插值矩阵计算更新的因子矩阵  $\hat{\mathbf{V}}^{(\text{new})}$ 、 $\hat{\mathbf{B}}^{(\text{new})}$ 、 $\hat{\mathbf{C}}^{(\text{new})}$ 。

④ 将  $\hat{\mathbf{V}}^{(\text{new})}$ 、 $\hat{\mathbf{B}}^{(\text{new})}$ 、 $\hat{\mathbf{C}}^{(\text{new})}$  作为第  $t-1$  次迭代的因子矩阵, 并根据式(16)更新当前的因子矩阵, 分别记为  $\hat{\mathbf{V}}^{(t)}$ 、 $\hat{\mathbf{B}}^{(t)}$ 、 $\hat{\mathbf{C}}^{(t)}$ 。

⑤ 根据式(13)计算误差  $f^{(t)} = \|\mathbf{X}^{K \times J \times I} - \hat{\mathbf{C}}^{(t)} \odot \hat{\mathbf{B}}^{(t)} \hat{\mathbf{V}}^{(t)\top}\|_{\text{F}}^2$  并作为迭代终止的条件, 即当  $|f^{(t)} - f^{(t-1)}| > \varepsilon$  时, 返回①并令  $t \leftarrow t+1$ , 重复①~④; 当  $|f^{(t)} - f^{(t-1)}| \leq \varepsilon$  时, 迭代终止, 其中  $\varepsilon$  表示门限, 或者设定最大迭代次数作为终止条件。

**步骤 4** 将步骤 3 得到的初始化因子矩阵和原始对称张量  $\mathbf{C}_x$  作为 ALS 算法的输入, 重复步骤 3 直到达到迭代终止条件, 最终实现欠定瞬时混合信道矩阵的盲辨识, 即不妨将因子矩阵  $\mathbf{V}$  作为估计混合矩阵。

本文算法的计算复杂度分析从 3 个方面展开, 其一, 所提算法和 SOBIUM 算法构造的张量切片矩阵都属于二维代数结构, 具有比 FOBIUM 算法中的四阶累积量更低的复杂度。其二, 对于三阶对称张量  $\mathbf{C}_x \in \mathbb{R}^{m \times m \times P}$  直接执行 CP 标准分解时, 令张量的秩为信源数  $n$ , 则 ALS 单次迭代的计算复杂度为  $\mathcal{O}(3nPm^2) + \mathcal{O}(mPn^2) + \mathcal{O}(m^2n^2)$  [18]; 而压缩后的核张量  $\mathcal{G}$  经过 ELS+ALS 分解的总复杂度可以表示为  $\mathcal{O}(m^6) + \mathcal{O}(3n(n+1)m^2) + \mathcal{O}(m(n+1)n^2) + \mathcal{O}(m^2n^2)$ 。其三, 与传统 ALS 迭代算法相比, ELS+ALS 组合方法的复杂度相对较低, 有效提高张量分解的收敛速度, 降低算法的运算时间。

综上所述, 本文算法在构造对称张量、张量压缩和增强线性搜索等方面能够降低复杂度, 证明了所提算法的有效性和可行性。此外, 本文的张量分析概念包含张量分解与估计混合矩阵的关系、构造对称三阶张量、张量压缩以及核张量分解 4 个环节, 构建了以因子矩阵作为欠定混合矩阵估计测度的信道矩阵盲辨识方法。

## 5 仿真实验

为了验证本文算法在实数域欠定混合矩阵估计中的可行性和有效性, 分别采用 LI-TIFROM [10]、UBSS-SCA [6]、SOBIUM [12] 作为对比算法。源信号来自文献[2]的语音信号和音乐信号, 其中, 采样频率为 16 kHz, 语音时长为 10 s。由于时域语音和音乐

信号都是由实数组成的, 因此该实验中的瞬时混合矩阵为随机生成的  $m \times n$  维实数矩阵。从语音信号集中任意选取  $n$  个作为源信号, 通过混合信道矩阵后得到  $m$  个观测信号, 直接对时域观测信号进行张量化处理并借助 ELS+ALS 实现混合信道矩阵的盲辨识。此外, 为了验证本文算法对通信信号的有效性, 本文采用多维正交调幅 (QAM, quadrature amplitude modulation) 信号作为信源估计混合矩阵。实验采取的性能指标为信道矩阵的平均相对误差, 可以表示为

$$\text{error} = \frac{\|\mathbf{A} - \hat{\mathbf{A}}\|_{\text{F}}}{\|\mathbf{A}\|_{\text{F}}} \quad [12,15]$$

其中,  $\hat{\mathbf{A}}$  表示混合矩阵  $\mathbf{A}$  最佳的排序和尺度估计。此外, 平均相对误差越小表明估计混合矩阵越接近真实的混合矩阵, 说明本文算法在信道矩阵盲辨识方面性能越优异。

### 5.1 实测语音信号的欠定混合矩阵估计

针对瞬时混合的实数域非平稳语音信号, 分别在混合矩阵为  $3 \times 4$ 、 $4 \times 5$  和  $5 \times 6$  这 3 种应用场景下验证各个算法在处理不同混合矩阵时的估计能力。由于分割子段长度大于或等于 40 ms 时才能保证语音信号的非平稳性 [3], 则  $P$  应小于或等于 250。不妨令  $P = 250$ , 在每个混合信道场景下随机生成 50 个实数域混合矩阵, 每个混合矩阵中包含  $m \times n$  个未知元素, 不同信道矩阵下的估计误差 (语音) 如图 2 所示。从图 2 中可以看出, 相较于对比算法, 本文算法在 3 种场景下均取得了最小的信道矩阵估计误差, 说明本文算法在不同混合信道下取得的欠定混合矩阵估计性能优于其余对比算法。此外, 随着信号个数的增加, LI-TIFROM 和本文算法的估计误差随之下降, 而 UBSS-SCA 和 SOBIUM 算法的估计误差基本不变。

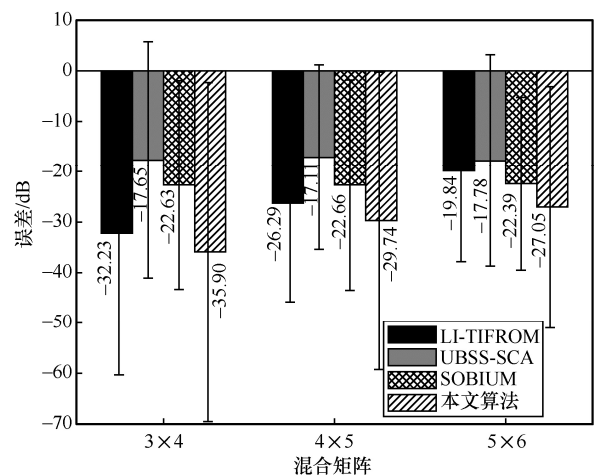


图 2 不同信道矩阵下的估计误差 (语音)

不失一般性，在混合矩阵为 $5 \times 6$ 的情况下分别验证步长为 1、步长为 1.25、步长为 $t^{\frac{1}{3}}$ 的 3 种 ALS 算法以及 ELS 优化的 ALS 算法在最小化代价函数方面的迭代收敛快慢。图 3 表示 4 种算法计算代价函数随迭代次数的变化情况。从图 3 可以看出，变步长的 ALS 比传统的 ALS 具有更快的收敛速度，且 ELS+ALS 率先达到收敛状态，说明 ELS 能够加快 ALS 的收敛速度。

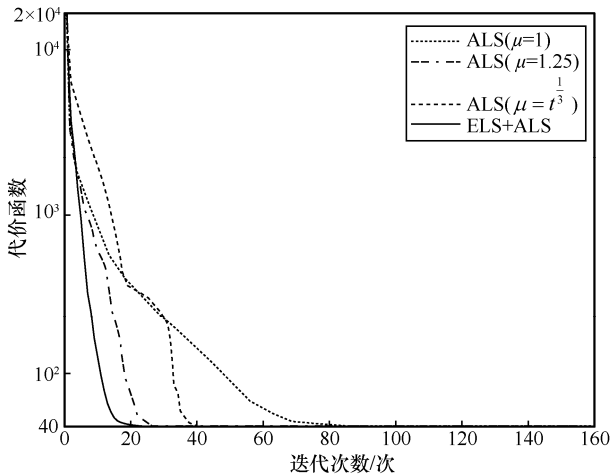


图 3 代价函数随迭代次数的变化情况 (语音)

为了验证本文算法在不同信噪比 (SNR, signal to noise ratio) 下的抗噪性能，在混合信道为 $3 \times 4$ 的情况下利用随机生成的高斯白噪声使 SNR 取值范围为 $-5 \sim 50$  dB 且间隔为 5 dB。在不同 SNR 条件下，4 种算法得到的欠定混合矩阵估计误差 (语音) 如图 4 所示。从图 4 可以看出，随着 SNR 的增加，所有算法的估计误差都随之降低，当 SNR $>20$  dB 时，算法估计误差基本趋于稳定。本文算法在选取的 SNR 区间内得到的矩阵估计误差最小，其次是 SOBIUM 算法和 LI-TIFROM 算法。

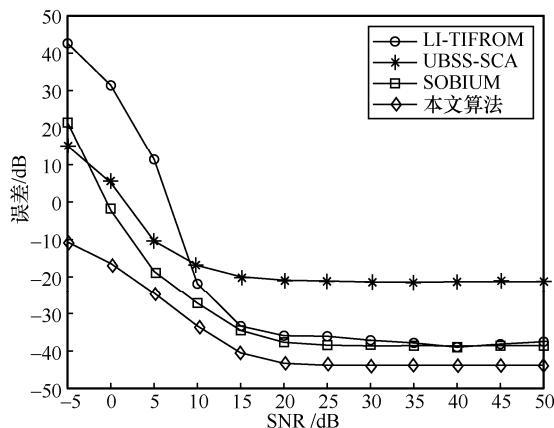


图 4 不同 SNR 下的估计误差 (语音)

## 5.2 实测音乐信号的欠定混合矩阵估计

鉴于音乐信号通常包含重复的音色信息，故从由语音和音乐信号组成的数据库中选取对应的信源验证算法的欠定混合矩阵估计能力。为保证语音子段序列的非平稳性，选取 $P = 250$ ，分别在混合矩阵为 $3 \times 4$ 、 $4 \times 5$  和 $5 \times 6$  这 3 种混合信道情况下随机生成 50 个对应的混合矩阵，4 种算法在不同混合矩阵条件下的估计误差 (音乐) 如图 5 所示。从图 5 可以看出，本文算法取得了比其余算法更低的欠定矩阵估计误差，且可以取得与图 2 基本一致的结论，即随着信号个数的增加，LI-TIFROM 和本文算法的估计误差逐渐降低。

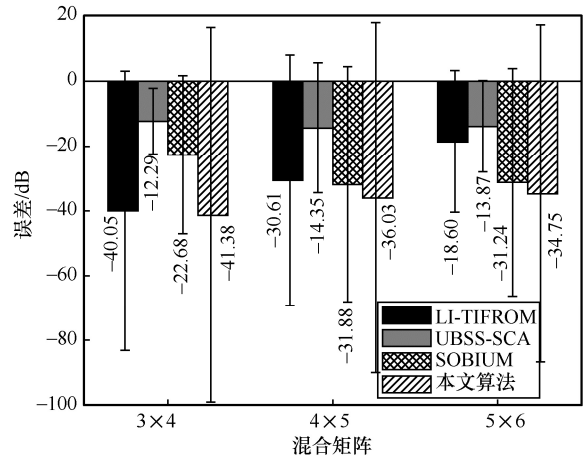


图 5 不同混合矩阵下的估计误差 (音乐)

图 6 表示在 $5 \times 6$  情况下步长分别为 1、1.25 和 $t^{\frac{1}{3}}$  的 3 种 ALS 算法以及 ELS+ALS 算法计算代价函数随迭代次数的变化情况。从图 6 中可以看出，变步长 ALS 比步长为 1 的 ALS 收敛速度更快，且 ELS 在提高 ALS 收敛速度方面优于变步长方式。此外，4 种算法最终都达到了收敛的状态，取得了相同的代价函数值，说明 4 种 ALS 算法在张量分解过程中获得了相同因子矩阵。

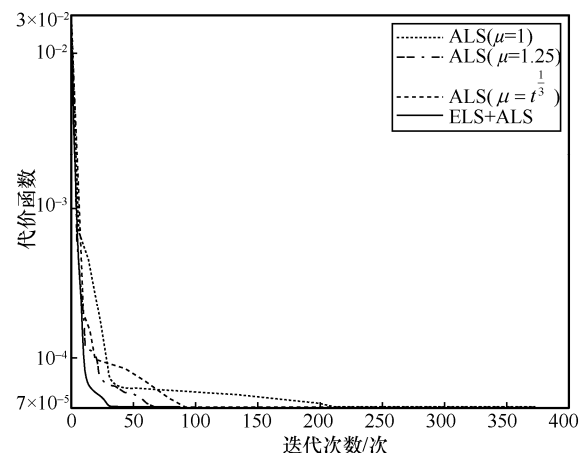


图 6 代价函数随迭代次数的变化情况 (音乐)

在不同 SNR 情况下, 4 种算法得到的欠定矩阵估计误差 (音乐) 如图 7 所示。与图 4 对比可知, 本文算法取得的估计误差基本不变, 说明音乐信号的引入没有改变本文算法的估计性能。此外, LI-TIFROM 和 SOBIUM 的辨识性能受音乐信号的影响相对较大。

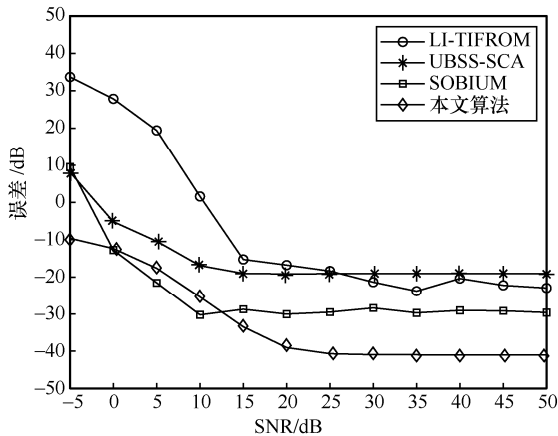


图 7 不同 SNR 下的估计误差 (音乐)

### 5.3 QAM 信号的欠定混合矩阵估计

为了验证本文算法对以 QAM 信号为代表的通信信号混合矩阵估计的可行性和有效性, 分别在混合矩阵为  $3 \times 4$ 、 $4 \times 5$  和  $5 \times 6$  这 3 种场景下随机生成相应的实数矩阵, 模拟信号在传输过程中的幅度衰减情况。其中, QAM 信号的长度为 1 000, 采样频率为 8 000 Hz, 信道带宽为 20 MHz, 不妨令分割子段数  $P = 200$ 。由于源信号和观测信号均为复数序列, 故得到的估计混合矩阵为复数矩阵。因此, 提取估计混合矩阵的实部计算信道矩阵的平均相对误差, 经过 50 次仿真后的平均结果如表 1 所示。

表 1 QAM 信号的混合矩阵平均相对误差

算法	混合矩阵( $m \times n$ )平均相对误差/dB		
	$3 \times 4$	$4 \times 5$	$5 \times 6$
LI-TIFROM	-25.85	-20.23	-15.40
UBSS-SCA	-14.87	-13.79	-14.76
SOBIUM	-26.05	-20.86	-18.25
本文算法	-29.34	-25.17	-19.49

由表 1 可知, 随着混合矩阵形状增大, 各算法的估计误差也随之增大。LI-TIFROM 和 UBSS-SCA 依赖信号的稀疏变换属性, 在处理 QAM 信号的复值观测数据时估计误差较大。本文算法估计性能优

于对比算法, 说明分割策略下的自协方差矩阵相较于 SOBIUM 的时延协方差矩阵具有更明显的信号特征表达能力。

## 6 结束语

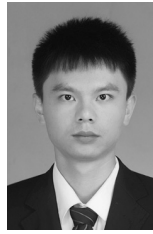
针对欠定信道矩阵盲辨识问题, 提出了一种基于张量分析的欠定矩阵盲估计算法。首先, 利用分割策略将观测信号分割为不重叠的子段, 计算每个子段的自协方差矩阵构造对称的三阶张量; 然后, 通过 MLSVD 将原张量压缩为低维的核张量并进行张量分解; 最后, 引入 ELS 技术加速 ALS 算法的收敛, 得到的因子矩阵作为估计的欠定混合矩阵, 但分割子段数的选取则受到信号属性和应用场景的约束。实验表明, 本文算法在处理欠定混合矩阵估计问题时, 相较于稀疏变换方法和传统的高阶统计量方法在估计误差方面具有优势。此外, 从理论上研究复值信号的欠定混合矩阵估计问题将是未来工作的重点。

### 参考文献:

- [1] BOUSSÉ M, DEBALS O, LATHAUWER L D. A tensor-based method for large-scale blind source separation using segmentation[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2017, 65(2): 346-358.
- [2] MA B Z, ZHANG T Q, AN Z L, et al. Measuring dependence for permutation alignment in convolutive blind source separation[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, 2022, 69(3): 1982-1986.
- [3] 马宝泽, 张天骐, 安泽亮, 等. 基于张量分解的卷积盲源分离方法[J]. 通信学报, 2021, 42(8): 52-60.
- [4] MA B Z, ZHANG T Q, AN Z L, et al. Convolutive blind source separation method based on tensor decomposition[J]. Journal on Communications, 2021, 42(8): 52-60.
- [5] LAWAL A, MAYYALA Q, ABED-MERAIM K, et al. Blind signal estimation using structured subspace technique[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, 2021, 68(8): 3007-3011.
- [6] XIE Y, XIE K, XIE S L. Underdetermined blind separation of source using lp-norm diversity measures[J]. Neurocomputing, 2020, 411: 259-267.
- [7] MA B Z, ZHANG T Q. Underdetermined blind source separation based on source number estimation and improved sparse component analysis[J]. Circuits, Systems, and Signal Processing, 2021, 40(7): 3417-3436.
- [8] ZHANG M J, YU S M, WEI G. Sequential blind identification of underdetermined mixtures using a novel deflation scheme[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2013, 24(9): 1503-1509.
- [9] YANG L, ZHANG H, CAI Y. A low-complexity PARAFAC decomposition for underdetermined blind system identification with complex mixtures[J]. Circuits, Systems, and Signal Processing, 2018, 37(11): 4842-4860.

- [9] SMITH S, PISCHELLA M, TERRÉ M. A moment-based estimation strategy for underdetermined single-sensor blind source separation[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2019, 26(6): 788-792.
- [10] ABRARD F, DEVILLE Y. A time-frequency blind signal separation method applicable to underdetermined mixtures of dependent sources[J]. *Signal Processing*, 2005, 85(7): 1389-1403.
- [11] LATHAUWER L D, CASTAING J, CARDOSO J F. Fourth-order cumulant-based blind identification of underdetermined mixtures[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2007, 55(6): 2965-2973.
- [12] LATHAUWER L D, CASTAING J. Blind identification of underdetermined mixtures by simultaneous matrix diagonalization[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2008, 56(3): 1096-1105.
- [13] COMON P, RAJIH M. Blind identification of under-determined mixtures based on the characteristic function[J]. *Signal Processing*, 2006, 86(9): 2271-2281.
- [14] BOUSSÉ M, DEBALS O, LATHAUWER L D. Tensor-based large-scale blind system identification using segmentation[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2017, 65(21): 5770-5784.
- [15] GUAN W, DONG L L, ZHOU J M, et al. Tensor-based approach for underdetermined operational modal identification[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2021, 160: 107891.
- [16] ZHAO R Q, WANG Q. Learning separable dictionaries for sparse tensor representation: an online approach[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2019, 66(3): 502-506.
- [17] RAJIH M, COMON P, HARSHMAN R A. Enhanced line search: a novel method to accelerate PARAFAC[J]. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 2008, 30(3): 1128-1147.
- [18] COMON P, LUCIANI X, DE-ALMEIDA A L F. Tensor decompositions, alternating least squares and other tales[J]. *Journal of Chemometrics*, 2009, 23(9): 393-405.
- [19] COMON P. Tensors: a brief introduction[J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2014, 31(3): 44-53.
- [20] KOLDA T, BADER B. Tensor decompositions and applications[J]. *SIAM Review*, 2009, 51(3): 455-500.
- [21] SIDIROPOULOS N D, DE LATHAUWER L, FU X, et al. Tensor decomposition for signal processing and machine learning[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2017, 65(13): 3551-3582.

## [作者简介]



马宝泽(1990-),男,河北廊坊人,博士,重庆邮电大学讲师,主要研究方向为盲源分离、信道辨识、数据分析、深度学习等。



李国军(1978-),男,四川资阳人,博士,重庆邮电大学教授、博士生导师,主要研究方向为复杂恶劣环境超视距无线通信与网络。



向翠玲(1996-),女,重庆人,重庆邮电大学硕士生,主要研究方向为信道估计与均衡、短波建链技术。



徐阳(1998-),男,湖南常德人,重庆邮电大学硕士生,主要研究方向为信道估计与均衡、自适应迭代算法。